数理解析研究所講究録
929巻 1995年 53-61

E_8型単連結コンパクトリー群のランク8の極大部分群

五明　智　　　　SATOSHI GOMYO

はじめに

単連結コンパクトリー群 G の極大ランクの極大部分群は A. Borel and J. de Siebenthal ([1]) により、分類されている。これらの部分群は、ある order p $(p = 2,3,5)$ の automorphism σ により

$$G^\sigma = \{x \in G \mid \sigma(x) = x\}$$

と実現されることが知られている。横田らにより ([6][7][8])、G_2, F_4, E_6, E_7 型のときは、G^σ はすべて具体的に実現されている。E_8型のときは、それぞれ

$$A_1 \times E_7, \qquad D_8, \qquad A_8, \qquad A_4 \times A_4, \qquad A_2 \times E_6,$$

型の部分群が存在すると実現されることが知られている ([1]) が $A_1 \times E_7$ 型と D_8 型は、横田らにより ([2][5][6]) 具体的に実現されている。ここでは残りの G^σ の具体的実現を行なう。

type	$(E_8)^\sigma$	order of σ
A_8	$SU(9)/\mathbf{Z}_3$	3
$A_4 \times A_4$	$(SU(5) \times SU(5))/\mathbf{Z}_5$	5
$A_2 \times E_6$	$(SU(3) \times E_6)/\mathbf{Z}_3$	3

準備

$\mathbf{C}^n$ の標準基を $e_1, \cdots, e_n$ 、$(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ により定義される対称双線型な内積とする。$\mathbf{C}^n$ の k重外積ベキ空間 $\bigwedge^k(\mathbf{C}^n)$ $(0 \leq k \leq n)$ 上に内積を

$$(\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{y}_k) = \det((\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)), \qquad k \geq 1,$$
$$(a, b) = ab, \qquad a, b \in \textstyle\bigwedge^0(\mathbf{C}^n) = \mathbf{C},$$

により定義する。$\mathbf{u} \in \bigwedge^k(\mathbf{C}^n)$ に対して $*(\mathbf{u}) \in \bigwedge^{n-k}(\mathbf{C}^n)$ を

$$(*(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \qquad \text{for } \mathbf{v} \in \bigwedge^{n-k}(\mathbf{C}^n),$$

を満たすように定義する。

ρ と $d\rho$ を $SL(n, \mathbf{C})$ と $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ の$\bigwedge^k(\mathbf{C}^n)$ $(k = 1, \cdots, n)$ 上の表現

$$\rho(A)(\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_k) = A\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge A\mathbf{x}_k,$$
$$d\rho(X)(\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_k) = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge X\mathbf{x}_j \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_k,$$

とし、$\bigwedge^0(\mathbf{C}^n) = \mathbf{C}$ 上の表現を

$$\rho(A)1 = 1, \qquad d\rho(X)1 = 0,$$

とする。以下、記号 ρ と $d\rho$ は省略する。

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \bigwedge^k(\mathbf{C}^n)$ $(1 \leq k \leq n)$, に対して $\mathbf{C}^n$ 上の変換 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ を

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} : x \mapsto *(\mathbf{v} \wedge *(\mathbf{u} \wedge x)) + (-1)^{n-k} \frac{n-k}{n} (\mathbf{u}, \mathbf{v})x, \quad (x \in \mathbf{C}^n),$$

と定義する。 すると $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ は $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ の元となる。

§1 Subgroup $SU(9)/\mathbf{Z}_3$.

ベクトル空間

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(9, \mathbf{C}) \oplus \bigwedge^3(\mathbf{C}^9) \oplus \bigwedge^3(\mathbf{C}^9)$$

に、積を

$$(X, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = [(X_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1), (X_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)]$$

ここで

$$\begin{cases} X = [X_1, X_2] + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_2 \times \mathbf{v}_1, \\ \mathbf{u} = X_1\mathbf{u}_2 - X_2\mathbf{u}_1 + *(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2), \\ \mathbf{v} = -{}^tX_1\mathbf{v}_2 + {}^tX_2\mathbf{v}_1 - *(\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2), \end{cases}$$

により定義すると、$\mathfrak{g}$ は複素リー環になる。さらに、次の定理が成り立つ。

Theorem 1.1. *The Lie algebra $\mathfrak{g}$ is a complex simple Lie algebra of type E_8.*

$\mathfrak{g}$ 上に共役線型写像 γ と内積 $< R_1, R_2 >$ を

$$\gamma(X, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (-X^*, -\overline{\mathbf{v}}, -\overline{\mathbf{u}}),$$
$$< R_1, R_2 > = -B(R_1, \gamma R_2),$$

により定義する。ここで B は $\mathfrak{g}$ の Killing form である。$\mathfrak{g}$ の Killing form は

$$B((X_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1), (X_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)) = 60\mathrm{tr}X_1X_2 + 60(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) + 60(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1),$$

となり、従って

$$< (X_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1), (X_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) >= 60\mathrm{tr}X_1X_2^* + 60(\mathbf{u}_1, \overline{\mathbf{u}_2}) + 60(\mathbf{v}_1, \overline{\mathbf{v}_2}),$$

は正定値 Hermite 内積となる。

すると [3] の Theorem 23 と同様に、群

$$E_8 = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \mid \ < \alpha R_1, \alpha R_2 >=< R_1, R_2 >\}$$

は E_8型単連結コンパクトリー群となる。

1 の三乗根 $\omega = \exp(2\pi i/3)$ を用いて E_8 の元 w を

$$w(X, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (X, \omega\mathbf{u}, \omega^2\mathbf{v})$$

と定義し $(w^3 = 1)$ 、さらに部分群 $(E_8)^w$ を

$$(E_8)^w = \{\alpha \in E_8 \mid \alpha w = w\alpha\}$$

とする。

Theorem 1.2. *The subgroup $(E_8)^w$ of E_8 is isomorphic to the group $SU(9)/\mathbf{Z}_3$.*

Proof. 写像 $\varphi : SU(9) \to GL(\mathfrak{g})$ を、

$$\varphi(A)(X, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathrm{Ad}(A)X, A\mathbf{u}, {}^tA^{-1}\mathbf{v})$$

と定義する。明らかに、φ は準同型写像である。任意の $Y \in \mathfrak{su}(9)$ に対し、

$$\exp(\mathrm{ad}(Y, 0, 0)) = \varphi(\exp Y)$$

が成立するので、$\varphi(A)$ は $\mathfrak{g}$ の自己同型写像であり、更に

$$< \varphi(A)R_1, \varphi(A)R_2 >=< R_1, R_2 >$$

が成立するので、$\varphi(A) \in E_8$ となる。また $w = \varphi(\zeta I)$ $(\zeta = \exp(2\pi i/9))$ より、$\varphi(A) \in (E_8)^w$ も明らかである。

$(E_8)^w$ のリー環は、

$$\{R \in \mathfrak{g} \mid \gamma R = R, wR = R\} = \{(X, 0, 0) \in \mathfrak{g} \mid X \in \mathfrak{su}(9)\} \cong \mathfrak{su}(9),$$

と同型になり、また $(E_8)^w$ は連結 ([4]) だから、φ は全射である。

最後に、

$$\mathrm{Ker}\varphi = \{I, \omega I, \omega^2 I\} \cong \mathbf{Z}_3$$

は明らかなので、

$$SU(9)/\mathbf{Z}_3 \cong (E_8)^w$$

が得られる。

$\square$

§2 Subgroup $(SU(5) \times SU(5))/\mathbf{Z}_5$.

ベクトル空間

$$\mathfrak{l} = g_0 \oplus g_1 \oplus g_2 \oplus g_3 \oplus g_4$$

ここで

$$\begin{aligned}
&g_0 = \mathfrak{sl}(5, \mathbf{C}) \oplus \mathfrak{sl}(5, \mathbf{C}), \\
&g_1 = \bigwedge^1(\mathbf{C}^5) \otimes \bigwedge^2(\mathbf{C}^5), \qquad g_2 = \bigwedge^2(\mathbf{C}^5) \otimes \bigwedge^1(\mathbf{C}^5), \\
&g_3 = \bigwedge^2(\mathbf{C}^5) \otimes \bigwedge^1(\mathbf{C}^5), \qquad g_4 = \bigwedge^1(\mathbf{C}^5) \otimes \bigwedge^2(\mathbf{C}^5),
\end{aligned}$$

に、anti-symmetric な積を以下の様に定義する。

$$\begin{array}{ll}
[g_0, g_0] \subset g_0, & [(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = ([X_1, X_2], [Y_1, Y_2]), \\
[g_0, g_1] \subset g_1, & [(X, Y), \mathbf{a} \otimes \mathbf{x}] = (X\mathbf{a}) \otimes \mathbf{x} + \mathbf{a} \otimes (Y\mathbf{x}), \\
[g_0, g_2] \subset g_2, & [(X, Y), \mathbf{y} \otimes \mathbf{b}] = (X\mathbf{y}) \otimes \mathbf{b} + \mathbf{y} \otimes (-{}^tY\mathbf{b}), \\
[g_0, g_3] \subset g_3, & [(X, Y), \mathbf{z} \otimes \mathbf{c}] = (-{}^tX\mathbf{z}) \otimes \mathbf{c} + \mathbf{z} \otimes (Y\mathbf{c}), \\
[g_0, g_4] \subset g_4, & [(X, Y), \mathbf{d} \otimes \mathbf{w}] = (-{}^tX\mathbf{d}) \otimes \mathbf{w} + \mathbf{d} \otimes (-{}^tY\mathbf{w}), \\
[g_1, g_4] \subset g_0, & [\mathbf{a} \otimes \mathbf{x}, \mathbf{d} \otimes \mathbf{w}] = (-(\mathbf{x}, \mathbf{w})\mathbf{a} \times \mathbf{d}, (\mathbf{a}, \mathbf{d})\mathbf{x} \times \mathbf{w}), \\
[g_2, g_3] \subset g_0, & [\mathbf{y} \otimes \mathbf{b}, \mathbf{z} \otimes \mathbf{c}] = ((\mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{y} \times \mathbf{z}, (\mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{c} \times \mathbf{b}), \\
[g_1, g_1] \subset g_2 \ \text{ and } & [g_4, g_4] \subset g_3, \\
 & [\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{x}_1, \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{x}_2] = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \otimes *(\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2), \\
[g_2, g_2] \subset g_4 \ \text{ and } & [g_3, g_3] \subset g_1, \\
 & [\mathbf{y}_1 \otimes \mathbf{b}_1, \mathbf{y}_2 \otimes \mathbf{b}_2] = *(\mathbf{y}_1 \wedge \mathbf{y}_2) \otimes (\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2), \\
[g_1, g_2] \subset g_3 \ \text{ and } & [g_4, g_3] \subset g_2, \\
 & [\mathbf{a} \otimes \mathbf{x}, \mathbf{y} \otimes \mathbf{b}] = *(\mathbf{y} \wedge \mathbf{a}) \otimes *(*(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{b}), \\
[g_2, g_4] \subset g_1 \ \text{ and } & [g_3, g_1] \subset g_4, \\
 & [\mathbf{y} \otimes \mathbf{b}, \mathbf{d} \otimes \mathbf{w}] = *(*(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{d}) \otimes *(\mathbf{w} \wedge \mathbf{b}).
\end{array}$$

すると $\mathfrak{l}$ は複素 graded (i.e., $[g_k, g_l] \subset g_m$ ここで $m \equiv k + l \mod 5$) リー環になる。さらに、次が成り立つ。

Theorem 2.1. *The Lie algebra* $\mathfrak{l}$ *is a complex simple Lie algebra of type* E_8.

$\mathfrak{l}$ の Killing form は

$$B(R_1,R_2) = 60\mathrm{tr}X_1X_2 + 60\mathrm{tr}Y_1Y_2 - 60(\mathbf{x}_1,\mathbf{w}_2)(\mathbf{a}_1,\mathbf{d}_2) - 60(\mathbf{x}_2,\mathbf{w}_1)(\mathbf{a}_2,\mathbf{d}_1) - 60(\mathbf{y}_1,\mathbf{z}_2)(\mathbf{b}_1,\mathbf{c}_2) - 60(\mathbf{y}_2,\mathbf{z}_1)(\mathbf{b}_2,\mathbf{c}_1),$$

となる。（ここで $R_i = (X,Y,\mathbf{a}\otimes\mathbf{x},\mathbf{y}\otimes\mathbf{b},\mathbf{z}\otimes\mathbf{c},\mathbf{d}\otimes\mathbf{w})$ 。）$\mathfrak{g}$ 上に共役線型写像 γ と正定値 Hermite 内積 $< R_1,R_2 >$ を

$$\gamma(X,Y,\mathbf{a}\otimes\mathbf{x},\mathbf{y}\otimes\mathbf{b},\mathbf{z}\otimes\mathbf{c},\mathbf{d}\otimes\mathbf{w}) = (-X^*,-Y^*,\overline{\mathbf{d}}\otimes\overline{\mathbf{w}},\overline{\mathbf{z}}\otimes\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{y}}\otimes\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{a}}\otimes\overline{\mathbf{x}}),$$

$$< R_1,R_2 > = -B(R_1,\gamma R_2) = 60\mathrm{tr}X_1X_2^* + 60\mathrm{tr}Y_1Y_2^* + 60(\mathbf{x}_1,\overline{\mathbf{x}_2})(\mathbf{a}_1,\overline{\mathbf{a}_2}) + 60(\mathbf{y}_1,\overline{\mathbf{y}_2})(\mathbf{b}_1,\overline{\mathbf{b}_2}) + 60(\mathbf{z}_1,\overline{\mathbf{z}_2})(\mathbf{c}_1,\overline{\mathbf{c}_2}) + 60(\mathbf{w}_1,\overline{\mathbf{w}_2})(\mathbf{d}_1,\overline{\mathbf{d}_2})$$

により定義する。

§1 と同様に、1 の五乗根 $\eta = \exp(2\pi i/5)$ を用いて、E_8型単連結コンパクトリー群

$$E_8 = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{l}) \mid \ < \alpha R_1, \alpha R_2 > = < R_1, R_2 >\}$$

の元 ι を

$$\iota(X,Y,\mathbf{a}\otimes\mathbf{x},\mathbf{y}\otimes\mathbf{b},\mathbf{z}\otimes\mathbf{c},\mathbf{d}\otimes\mathbf{w}) = (X,Y,\eta(\mathbf{a}\otimes\mathbf{x}),\eta^2(\mathbf{y}\otimes\mathbf{b}),\eta^3(\mathbf{z}\otimes\mathbf{c}),\eta^4(\mathbf{d}\otimes\mathbf{w})).$$

と定義し ($\iota^5 = 1$) 、部分群 $(E_8)^\iota$ を

$$(E_8)^\iota = \{\alpha \in E_8 \mid \alpha\iota = \iota\alpha\}$$

とする。 §1 Theorem 1.2 と同様に、次の定理が得られる。

Theorem 2.2. *The subgroup* $(E_8)^\iota$ *of* E_8 *is isomorphic to the group* $(SU(5)\times SU(5))/\mathbf{Z}_5$.

§3 Subgroup $(SU(3)\times E_6)/\mathbf{Z}_3$.

この section では、複素共役を τ で表わす。

$\mathfrak{C}$ を、実 Cayley algebra として、$\mathfrak{C}$ の共役を $\overline{x}$ で表わす。

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(3,\mathfrak{C}) = \{X \in M(3,\mathfrak{C}) \mid X = X^*\}$$

は、積

$$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$$

により、実 Jordan algebra になる。複素 Jordan algebra $\mathfrak{J}^{\mathbf{C}}$上に、内積 (X,Y) 、正定値 Hermite 内積 $< X,Y >$、cross product $X \times Y$、 cubic form (X,Y,Z) と determination $\det X$ を、以下の様に定義する。

$$
\begin{aligned}
(X,Y) &= \mathrm{tr}(X \circ Y),\\
< X,Y > &= (\tau X,Y),\\
X \times Y &= X \circ Y - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(X)Y + \mathrm{tr}(Y)X) + \frac{1}{2}\{\mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(Y) - (X,Y)\}I,\\
(X,Y,Z) &= (X, Y \times Z) = (X \times Y, Z),\\
\det X &= (X,X,X).
\end{aligned}
$$

横田 ([6]) により、複素 E_6 型リー環は

$$\mathfrak{e}_6^{\mathbf{C}} = \{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathfrak{J}^{\mathbf{C}}, \mathfrak{J}^{\mathbf{C}}) \mid (\phi X, X, X) = 0\}$$

と実現され、また群

$$E_6 = \left\{ \alpha \in \mathrm{Iso}_{\mathbf{C}}(\mathfrak{J}^{\mathbf{C}}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \det \alpha X = \det X \\ < \alpha X, \alpha Y > = < X,Y > \end{array} \right\}$$

は E_6型単連結コンパクトリー群であり、そのリー環は

$$\mathfrak{e}_6 = \{\phi \in \mathfrak{e}_6^{\mathbf{C}} \mid \; < \phi X, Y > + < X, \phi Y > = 0\}.$$

となることが知られている。

８１次元ベクトル空間 $\mathbf{C}^3 \otimes \mathfrak{J}^{\mathbf{C}}$ の元を

$$\mathbf{Y} = (Y_i) = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}, \qquad (Y_i \in \mathfrak{J}^{\mathbf{C}})$$

と書く。$\phi \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{J}^{\mathbf{C}}, \mathfrak{J}^{\mathbf{C}}), X = (x_{ij}) \in M(3, \mathbf{C})$ 及び $\mathbf{Y} = (Y_i) \in \mathbf{C}^3 \otimes \mathfrak{J}^{\mathbf{C}}$ に対して、$\phi \mathbf{Y}, X\mathbf{Y} \in \mathbf{C}^3 \otimes \mathfrak{J}^{\mathbf{C}}$ を

$$\circ\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \phi Y_1 \\ \phi Y_2 \\ \phi Y_3 \end{bmatrix}, \quad X\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} x_{11}Y_1 + x_{12}Y_2 + x_{13}Y_3 \\ x_{21}Y_1 + x_{22}Y_2 + x_{23}Y_3 \\ x_{31}Y_1 + x_{32}Y_2 + x_{33}Y_3 \end{bmatrix}.$$

と定義する。さらに $\mathbf{Y} = (Y_i), \mathbf{Z} = (Z_i) \in \mathbf{C}^3 \otimes \mathfrak{J}^{\mathbf{C}}$ に対し、内積 $(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$, 正定値 Hermite 内積 $< \mathbf{Y}, \mathbf{Z} >$, cross product $\mathbf{Y} \times \mathbf{Z}$, $\mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$ の元 $\mathbf{Y} * \mathbf{Z}$ 及び $\mathfrak{e}_6^{\mathbf{C}}$ の元 $\mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}$ を、以下の様に定義する。

$$(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = (Y_1, Z_1) + (Y_2, Z_2) + (Y_3, Z_3),$$

$$
\begin{aligned}
<\mathbf{Y},\mathbf{Z}> &= <Y_1,Z_1> + <Y_2,Z_2> + <Y_3,Z_3>,\\
\mathbf{Y}\times\mathbf{Z} &= \begin{bmatrix} Y_2\times Z_3 - Z_2\times Y_3\\ Y_3\times Z_1 - Z_3\times Y_1\\ Y_1\times Z_2 - Z_1\times Y_2\end{bmatrix},\\
\mathbf{Y}*\mathbf{Z} &= \begin{bmatrix} (Y_1,Z_1) & (Y_1,Z_2) & (Y_1,Z_3)\\ (Y_2,Z_1) & (Y_2,Z_2) & (Y_2,Z_3)\\ (Y_3,Z_1) & (Y_3,Z_2) & (Y_3,Z_3)\end{bmatrix} - \frac{1}{3}(\mathbf{Y},\mathbf{Z})I,\\
\mathbf{Y}\vee\mathbf{Z} &= Y_1\vee Z_1 + Y_2\vee Z_2 + Y_3\vee Z_3.
\end{aligned}
$$

ベクトル空間

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{sl}(3,\mathbf{C}) \oplus \mathfrak{e}_6^{\mathbf{C}} \oplus \mathbf{C}^3\otimes\mathfrak{J}^{\mathbf{C}} \oplus \mathbf{C}^3\otimes\mathfrak{J}^{\mathbf{C}}$$

に、積を

$$(X,\phi,\mathbf{Y},\mathbf{Z}) = [(X_1,\phi_1,\mathbf{Y}_1,\mathbf{Z}_1),(X_2,\phi_2,\mathbf{Y}_2,\mathbf{Z}_2)]$$

ここで

$$
\begin{cases}
X = [X_1,X_2] + \frac{1}{4}\mathbf{Y}_1\circ\mathbf{Z}_2 - \frac{1}{4}\mathbf{Y}_2\circ\mathbf{Z}_1,\\
\phi = [\phi_1,\phi_2] + \frac{1}{2}\mathbf{Y}_1\vee\mathbf{Z}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{Y}_2\vee\mathbf{Z}_1,\\
\mathbf{Y} = \phi_1\mathbf{Y}_2 - \phi_2\mathbf{Y}_1 + X_1\mathbf{Y}_2 - X_2\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Z}_1\times\mathbf{Z}_2,\\
\mathbf{Z} = -{}^t\phi_1\mathbf{Z}_2 + {}^t\phi_2\mathbf{Z}_1 - {}^tX_1\mathbf{Z}_2 + {}^tX_2\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Y}_1\times\mathbf{Y}_2.
\end{cases}
$$

により定義する。

この環 $\mathfrak{m}$ は、[3] で述べられている複素 E_8 型リー環 $\mathfrak{e}_8^{\mathbf{C}}$ と、写像

$$
\begin{aligned}
&(\Phi(\phi,U,V,\nu),(X,Y,\xi,\eta),(Z,W,\zeta,\omega),r,s,t)\\
&\to \left(\begin{bmatrix} \frac{2}{3}\nu & -\frac{1}{2}\xi & \frac{1}{2}\zeta\\ \frac{1}{2}\omega & -\frac{1}{3}\nu - r & t\\ \frac{1}{2}\eta & s & -\frac{1}{3}\nu + r\end{bmatrix}, \phi, \begin{bmatrix} -2U\\ Z\\ X\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2V\\ Y\\ -W\end{bmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

により同型となる。従って次が成り立つ。

Theorem 3.1. *The Lie algebra $\mathfrak{m}$ is a complex simple Lie algebra of type E_8.*

$\mathfrak{l}$ の Killing form は

$$B(R_1,R_2) = 60\mathrm{tr}(X_1X_2) + \frac{5}{2}B_{\mathfrak{e}_6^{\mathbf{C}}}(\phi_1,\phi_2) + 15(\mathbf{Y}_1,\mathbf{Z}_2) + 15(\mathbf{Y}_2,\mathbf{Z}_1),$$

となる。(ここで $R_i = (X_i,\phi_i,\mathbf{Y}_i,\mathbf{Z}_i)$、また $B_{\mathfrak{e}_6^{\mathbf{C}}}$ は $\mathfrak{e}_6^{\mathbf{C}}$ の Killing form である。)

$\mathfrak{m}$ 上に共役線型写像 γ と正定値 Hermite 内積 $< R_1, R_2 >$ を

$$\gamma(X, \phi, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = (-\tau{}^t X, -\tau{}^t\phi\tau, -\tau\mathbf{Z}, -\tau\mathbf{Y}),$$

$$\begin{aligned} < R_1, R_2 > &= -B(R_1, \gamma R_2) \\ &= 60\mathrm{tr}(\tau{}^t X_1)X_2 + \frac{5}{2}B_{\mathfrak{e}_6^C}(\tau{}^t\phi_1\tau, \phi_2) + 15 < \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2 > + 15 < \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2 > \end{aligned}$$

により定義する。

§1 と同様に、E_8型単連結コンパクトリー群

$$E_8 = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{m}) \mid\ < \alpha R_1, \alpha R_2 > = < R_1, R_2 > \}$$

の元 δ を

$$\delta(X, \phi, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = (X, \phi, \omega\mathbf{Y}, \omega^2\mathbf{Z})$$

と定義し ($\delta^3 = 1$)、部分群 $(E_8)^\delta$ を

$$(E_8)^\delta = \{\alpha \in E_8 \mid \alpha\delta = \delta\alpha\}$$

とすると、§1 Theorem 1.2 と同様に、次の定理が得られる。

Theorem 3.2. *The subgroup* $(E_8)^\delta$ *is isomorphic to the group* $(SU(3) \times E_6)/\mathbf{Z}_3$.

REFERENCES

1. A. Borel and J. de Siebenthal, *Les sous-gropes fermes de rang maximum des groupes de Lie rang*, Comment. Math. Helv. **23** (1949), 200–221.
2. T. Imai and I. Yokota, *Non-compact simple Lie group $G = E_{8(-24)}$ of type E_8*, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. **15** (1980), 53–76.
3. T. Imai and I. Yokota, *Simply connected compact simple Lie group $G = E_{8(-248)}$ of type E_8*, J. Math. Kyoto Univ. **21** (1981), 741–762.
4. P. K. Rasevskii, *A theorem on the connectedness of a subgroup of a simply connected Lie group commuting with any of its automorphisms*, Trans. Moscow Math. Soc. **30** (1974), 3–22.
5. I. Yokota and O. Yasukura, *Non-compact simple Lie group $G = E_{8(8)}$*, Tukuba J. Math. **10** (1986), 331–349.
6. I. Yokota, *Realizations of involutive automorphisms σ and G^σ of exceptional linear Lie groups G, part I, $G = G_2, F_4$ and E_6, part II, $G = E_7$, part III, $G = E_8$*, Tukuba J. Math. **14** (1990), 185–223, 379–404; **15** (1991), 301–314.
7. I. Yokota, *Realization of automorphisms σ of order 3 and G^σ of compact exceptional Lie groups G, I, $G = G_2, F_4, E_6$.*, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. **20** (1985), 131–144.
8. I. Yokota, T. Ishihara and O. Yasukura, *Subgroup $((SU(3) \times SU(6))/\mathbf{Z}_3) \cdot Z_2$ of the simply connected simple Lie group E_7*, J. Math. Kyoto Univ. **23** (1983), 715–737.
9. S. Gomyo, *Realizations of maximal subgroups of rank 8 of the simply connected compact simple Lie group of type E_8*, (preprint).

Department of Mathematical Sciences,
Yokohama City University
22-2 Seto Kanazawaku
Yokohama 236 Japan

236 横浜市金沢区瀬戸 22-2
横浜市立大学 数理科学教室